

1

المحاضرة 16

الخطبة 5 / 24

تمارين حول الفصل الثالث
المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة والتي تُرَد
إلى معادلات تفاضلية ذات معاملات ثابتة.

[أ] بإجراء التغير المناسب على المتغير المستقل حول المعادلة التفاضلية
التالية إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة ،

ثم أوجد الحل العام لها . $y'' - \cot x y' - \sin^2 x y = \cos x - \cos^3 x$ الحل :

المعادلة التفاضلية المعطاة من الشكل : $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$
أخذ التحويل : $w = \int \sqrt{-Q(x)} dx$ فنحول المعادلة التفاضلية المعطاة
إلى الشكل :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + k \frac{\partial y}{\partial w} - y = - \frac{f(x)}{Q(x)}$$

$$w = \int \sqrt{-(-\sin^2 x)} dx = \int \sin x dx = -\cos x$$

لنوجد k :

$$k = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P(x) \frac{\partial w}{\partial x}}{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} = 0$$

لدينا $w = -\cos x$
 $\frac{\partial w}{\partial x} = \sin x$
 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \cos x$

عندها التغير المستقل $w = -\cos x$ حول إلى الشكل :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} - y = -w \quad (*)$$

هذه المعادلة معادلة تفاضلية ذات
معاملات ثابتة نحلها كما تعلمنا سابقاً من الفصل السابق.

الحل العام : $y = y_h + y_p$
حيث y_h : y_h

المعادلة المتجانسة النافذة لا هي : $\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} - y = 0$ ومعادلتها المميزة $m^2 - 1 = 0$ عند هذه المعادلة : $m_1 = 1$ and $m_2 = -1$

لذلك فالحل العام لا هو : $y_h = A_1 e^w + A_2 e^{-w}$

لنوجد y_p نرى الحل الخاص : نضع المؤثر التفاضلي العكسي :

للمعادلة النمو متجانسة نكتب باستخدام المؤثر التفاضلي D بالشكل :

نؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي العكسي : $(D^2 - 1)y = -w$ فيكون $\frac{1}{D^2 - 1}$ الحل الخاص لا :

$$y_p = - \frac{1}{D^2 - 1} w = \frac{1}{1 - D^2} w$$

$$(1 + D^2)w = w + 0 = w \quad y_p = w$$

الحل العام $(*)$

$$y = A_1 e^w + A_2 e^{-w} + w$$

فيكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو :

$$y = A_1 e^{\cos x} + A_2 e^{-\cos x} - \cos x$$

*** ** ** *

(3)

لنفرض أن الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية هو $y = x^2 + 4x^3 + x^4$ ،
فإن معادلات تكاملية معطاة بأحد الطرفين المعطى، على الشكل التالي:

$$xy'' - y' + 4x^2y = x^4$$

الحل:

المعادلة تكون بالشكل التفاضلي للمعادلة:

$$y'' - \frac{1}{x}y' + 4x^2y = x^2$$

$$w = \int \sqrt{4x^2} dx = 2 \int x dx = x^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P(w) \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + y = \frac{1}{4} w \quad (1)$$

هذه معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة عامة الحل العام لا

$$y = y_h + y_p$$

لنفرض y_h

$$(D^2 + 1)y = 0 \quad \text{حلها} \quad m^2 + 1 = 0 \quad \text{معاملات حقيقية} \quad m_1 = i, m_2 = -i$$

$$y_h = A_1 \cos w + A_2 \sin w$$

(الحل الحقيقي غير ممكن)

لنبحث عن الحل الخاص y_p (أحد للمعادلة (1)): نفترض على الطريقة الأولى

$$\frac{1}{D^2 + 1} x^2 = y_p \quad \text{نعم كنا سنستخدم الشكل} \quad y_p = \frac{1}{4} w = \frac{1}{4} x^2$$

$$y_p = \frac{1}{4} \frac{1}{1+D^2} w = \frac{1}{4} [1 - D^2] w = \frac{1}{4} [w - 0] = \frac{1}{4} w$$

$$y = A_1 \cos w + A_2 \sin w + \frac{1}{4} w$$

(4)

فيكون الحل العام للمعادلة المقطوعة:

$$y = A_1 \cos x^2 + A_2 \sin x^2 + \frac{1}{4} x^2$$

** ** *

نجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية بعد تحويلها إلى معادلة ذات معاملات ثابتة وذلك بإجراء التغير المناسب على المتغير المستقل:

$$x^4 y'' + 2x^3 y' + y = 1 + \frac{1}{x}$$

الحل:

$$y'' + \frac{2}{x} y' + \frac{1}{x^4} y = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{-2}{x^3}$$

$$k = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p(x) \frac{\partial w}{\partial x}}{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} = \frac{-\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x^2}}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = 0 \quad k=0$$

بالتالي فإن المعادلة تصبح على الشكل:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + y = \frac{f(x)}{Q(x)} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + y = 1 - w \quad (*)$$

$$\frac{f(x)}{Q(x)} = \frac{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x^4}} = \frac{\frac{x+1}{x^5}}{\frac{1}{x^4}} = \frac{x^4(x+1)}{x^5} = \frac{1}{x}(x+1) = 1 + \frac{1}{x} = 1 - w$$

المعادلة الناتجة (*) معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة

$$y_h = A_1 \cos w + A_2 \sin w$$

$$y_p = \frac{1}{p^2+1} (1-w) \Rightarrow y_p = [1-D^2](1-w) = 1-w$$

$$A_1 \cos w + A_2 \sin w + 1 - w$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية المقطوعة:

$$y = A_1 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + A_2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1 + \frac{1}{x}$$

** ** *

4- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية: $x^2 y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = x^3(1 + e^x)$
 وذلك بعد تحويلها إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة ~~بواسطة~~ بتحويل
 تغيير متغير إلى المتغير التالي:

المعادلة تكتب على الصورة: $y'' - \frac{2}{x} y' + (1 + \frac{2}{x^2}) y = x(1 + e^x)$

$P(x) = -\frac{2}{x} \Rightarrow P'(x) = \frac{2}{x^2}$

$Q(x) = 1 + \frac{2}{x^2}$

$Q(x) - \frac{1}{4} P^2(x) - \frac{1}{2} P'(x) =$
 $1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{4} (\frac{4}{x^2}) - \frac{1}{2} (\frac{2}{x^2}) = 1$

بالتالي ذات التحويل $y = e^{-\frac{1}{2} \int P(x) dx} \cdot v$
 حول المعادلة التفاضلية إلى الشكل: $v'' + kv = f(x) e^{-\frac{1}{2} \int P(x) dx}$

$y = e^{-\frac{1}{2} \int -\frac{2}{x} dx} \cdot v = e^{\ln x} \cdot v = xv$ $y = xv$

حول إلى الشكل: $v'' + v = x(1 + e^x) \cdot \frac{1}{x} = 1 + e^x$

$u'' + v = x(1 + e^x) \cdot \frac{1}{x} = 1 + e^x$ $= x(1 + e^x) \frac{\ln x}{x}$

$u'' + v = 1 + e^x \quad (x)$

$v = v_h + v_p$ الحل العام لا صفر:

$v'' + v = 0$ المعادلة المميزة $m^2 + 1 = 0$ جذورها $m_1 = i, m_2 = -i$
 الجذور عقدية غير فكرية فالحل العام هو المتجانسة مع (x)

$v_h = A_1 \cos x + A_2 \sin x$

$v_p = \frac{1}{D^2 + 1} (1 + e^x) = \frac{1}{1 + D^2} 1 + \frac{1}{1 + D^2} e^x$

(6)

$$= \frac{1}{D^2+1} e^{0x} + \frac{1}{D^2+1} e^x = 1 + \frac{1}{2} e^x \quad 1 = e^{0x}$$

$$v = A_1 \cos x + A_2 \sin x + 1 + \frac{1}{2} e^x$$

نروض v في المعادلة السابقة:

$$y = xv = x [A_1 \cos x + A_2 \sin x + \dots]$$

نضع الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة

$\times \times \times \times \times$

أوجد الحل العام للمعادلة المعطاة بعد تحويلها إلى معادلة ذات معاملات ثابتة وذلك بإجراء تغيير مناسب عام، اكتب النتيجة

$$(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 2x$$

الحل: المعادلة التفاضلية المعطاة تُكتب على الشكل:

$$y'' + \frac{4x}{1+x^2} y' + \frac{2}{1+x^2} y = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$P(x) = \frac{4}{1+x^2} \quad \text{and} \quad Q(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

$$P'(x) = 2 \cdot \frac{2-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$Q(x) - \frac{1}{4} P^2(x) - \frac{1}{2} P'(x) = \dots = 0$$

$k=0$ إذن المعادلة:

$$y = e^{-\frac{1}{2} \int P(x) dx} \cdot v$$

$$v'' + kv' = f(x) \cdot e^{-\frac{1}{2} \int P(x) dx}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2} \int P(x) dx} \cdot v(x) = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{4x}{1+x^2} dx} \cdot v(x) = e^{-\ln(1+x^2)} \cdot v(x) = \frac{1}{1+x^2} v(x)$$

بحلها إلى:

$$v'' = 2x$$

نوجد v مباشرة بالمكاملة مرتين

$$v' = x^2 + c_1 \rightarrow v = \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$$

نضع في المعادلة فيكون:

$$y = \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2 \right)$$

هذا الحل العام للمعادلة التفاضلية المطارة .

المسألة 6 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية بعد تحويلها إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة بإجراء تغيير مناسب على المتحول التابع :

$$x^2 y'' - 4x y' + (6 - x^2) y = x e^x$$

الحل :

المعادلة التفاضلية المطارة تكون على الصورة :

$$y'' - \frac{4}{x} y' + \left(\frac{6}{x^2} - 1 \right) y = x e^x$$

$$p(x) = -\frac{4}{x} \Rightarrow p'(x) = \frac{4}{x^2} \quad \text{and} \quad q(x) = \frac{6}{x^2} - 1$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{x} p^2(x) - \frac{1}{2} p'(x) = \frac{6}{x^2} - 1 - \frac{1}{x} \left(\frac{4}{x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{x^2} \right) \\ &= \frac{6}{x^2} - 1 - \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^2} = -1 \end{aligned}$$

$$y = e^{-\int p(x) dx} \quad v(x) = e^{-\int -\frac{4}{x} dx} \quad v(x) = e^{4 \int \frac{dx}{x}}$$

$$y = e^{4x} \cdot v(x) = x^4 \cdot v(x)$$

المعادلة تتحول إلى الشكل :

$$u'' - v = x e^x \quad \text{حيث} \quad u = \frac{y}{x^4}$$

$$u'' - v = \frac{e^x}{x}$$

$$y = A_1 e^x + A_2 e^{-x}$$

كلمة : p

ملاحظة : لا تقبل طريقتي المؤثر التفاضلي العكسي والعاملات غير المعينة من إيجاد الحل الخاص عندما تكون المعادلة $f(x)$ قاطع عدداً غير منته من المشتقات العليا .

$$f(x) \text{ هو مثالي هي } \frac{e^x}{x}$$

إذاً علينا استخدام طريقة لاغرانج :

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dx + y_2 \int \frac{w_2}{w} dx$$

$$w(e^x, \bar{e}^x) = \begin{vmatrix} e^x & \bar{e}^x \\ e^x & -\bar{e}^x \end{vmatrix} = -2$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & \bar{e}^x \\ \frac{e^x}{x} & -\bar{e}^x \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x}$$

$$y_p = e^x \int \frac{-\frac{1}{x}}{-2} dx + \bar{e}^x \int \frac{\frac{e^{2x}}{x}}{-2} dx$$

$$y_p = \frac{e^x}{2} \ln x - \frac{\bar{e}^x}{2} \int \frac{e^{2x}}{x} dx$$

الحل العام عندئذ يكون:

$$y = x^2 \left[A_1 \bar{e}^x + A_2 e^x + \frac{e^x}{2} \ln x - \frac{\bar{e}^x}{2} \int \frac{e^{2x}}{x} dx \right]$$

أدعوه الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x^2 y'' + 2x^2 y' + (x^2 - 2)y = x^3 \bar{e}^{-x}$$

الحل:

المعادلة التفاضلية تكتب على الشكل:

$$y'' + 2y' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)y = x \bar{e}^{-x}$$

$$Q(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

$$P(x) = 2$$

$$P'(x) = 0$$

$$Q(x) - \frac{1}{4} P^2(x) = \frac{1}{4} P'(x) = -\frac{2}{x^2} = \frac{k}{x^2}; \quad k = -2$$

9

بالتالي فإن $y = \frac{1}{e^x} v(x)$ $v(x) = e^{-x} v(x)$ $y = \frac{1}{e^x} \int p(x) dx$
 حول المعادلة المعطاة إلى الشكل:

$$x^2 v'' - 2v = x^3$$

وهي معادلة أويلر

لحل نفرض أن $x = e^t$ فيكون $dx = e^t dt$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{x}$$

$$x \cdot v' = D_t v$$

$$x^2 v'' = D_t (D_t - 1) v$$

$$D_t (D_t - 1) v - 2v = e^{3t}$$

$$(D_t^2 - D_t - 2) v = e^{3t}$$

معادلة مميزة: $m^2 - m - 2 = 0$

$$(m-2)(m+1) = 0$$

$$m_1 = 2 \quad m_2 = -1$$

المعادلة المتجانسة المناظرة:

$$(D_t^2 - D_t - 2) v = 0$$

$$v_h = A_1 e^{2t} + A_2 e^{-t}$$

$$v = v_h + v_p$$

$$v_p = \frac{1}{D_t^2 - D_t - 2} e^{3t} \Rightarrow v_p = \frac{1}{4} e^{3t}$$

$$v = A_1 e^{2t} + A_2 e^{-t} + \frac{1}{4} e^{3t}$$

$$v = A_1 x^2 + \frac{A_2}{x} + \frac{1}{4} x^3$$

$$y = e^{-x} v(x) \quad \text{التحويل}$$

$$\Rightarrow y = e^{-x} \left(A_1 x^2 + \frac{A_2}{x} + \frac{1}{4} x^3 \right)$$

. x x x x x x *

٨- لتكن لدينا المعادلة التفاضلية :

$$(x^2)y'' - x(2x+3)y' + (x^2+3x+3)y = (6-x^2)e^x$$

الحل :-

$$y'' - \left(2 + \frac{3}{x}\right)y' + \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right)y = \left(\frac{6}{x^2} - 1\right)e^x$$

$$Q(x) = 1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}$$

$$P(x) = -2 - \frac{3}{x}$$

$$P'(x) = \frac{3}{x^2}$$

$$Q(x) - \frac{1}{4} P^2(x) - \frac{1}{2} P'(x) = 1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{4} \left(-2 - \frac{3}{x}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{3}{x^2}$$

$$= \dots = -\frac{3}{4} \frac{1}{x^2}$$

$$k = -\frac{3}{4} \quad \text{أي } \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$y = e^{\frac{1}{2} \int (2 + \frac{3}{x}) dx} v(x) \rightarrow y = e^x x^{\frac{3}{2}} v(x) \quad \text{ⓐ}$$

التحويل السابق يحول المعادلة السابقة إلى المعادلة :

$$x^2 v'' - \frac{3}{4} v = x^2 \left(\frac{6}{x^2} - 1 \right) e^x \quad \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$$

$$x^2 v'' - \frac{3}{4} v = (6 - x^2) x^{-\frac{3}{2}}$$

وهي معادلة أدر

$$D_t(D_t - 1)v - \frac{3}{4}v = (6 - e^{2t})e^{-\frac{3}{2}t}$$

$$(D_t^2 - D_t - \frac{3}{4})v = 6e^{-\frac{3}{2}t} - e^{\frac{1}{2}t}$$

المعادلة المميزة للمعادلة السابقة : $m^2 - m - \frac{3}{4} = 0$

$$m_1 = \frac{3}{2} \quad \text{and} \quad m_2 = -\frac{1}{2}$$

$$v_h = A_1 e^{\frac{3}{2}t} + A_2 e^{-\frac{1}{2}t} = A_1 x^{\frac{3}{2}} + A_2 \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$v_p = \frac{1}{D^2 - D - \frac{3}{4}} 6 \cdot e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{1}{D^2 - D - \frac{3}{4}} e^{\frac{1}{2}t}$$

$$v_p = 6 \cdot \frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{\frac{9}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}} - \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}} e^{\frac{1}{2}t}$$

$$v_p = 2e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{1}{6}e^{\frac{1}{2}t}$$

وبالتالي فإن :

$$v = A_1 x^{\frac{3}{2}} + \frac{A_2}{\sqrt{x}} + 2x^{-\frac{3}{2}} + \sqrt{x}$$

H. L. MOTIL

ينوصف لا يتم التحويل ⓐ في الحل العام